



量子小系统的热力学与有限时间优化控制

陈劲夫

合作者：马宇翰，翟若迅，董辉，孙昌璞

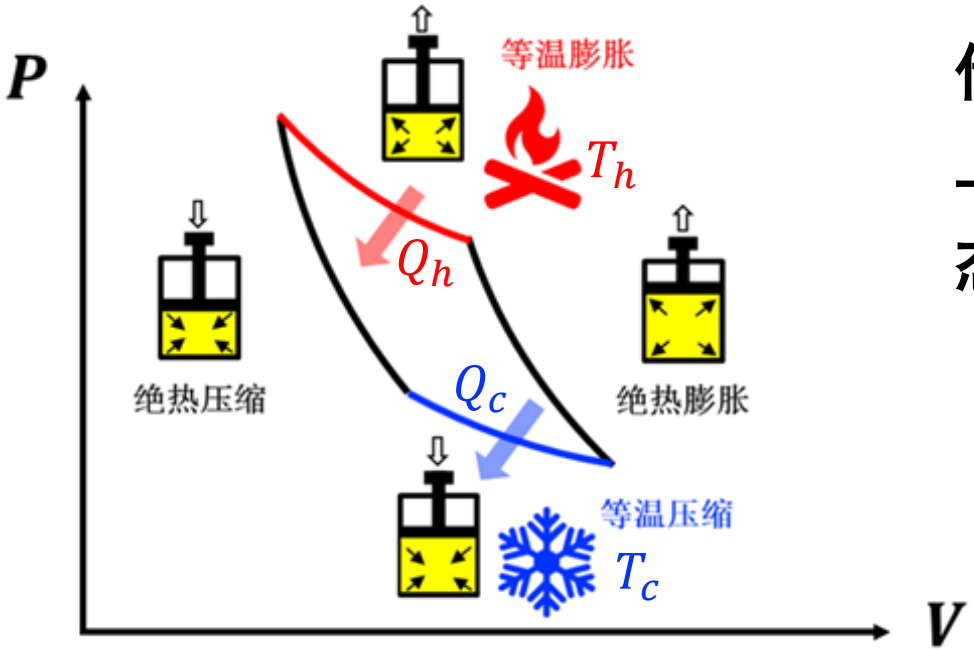
北京计算科学研究中心

中国工程物理研究院研究生院

报告大纲

- 背景：有限时间热力学
- 有限时间绝热过程：
  量子奥托热机的功率优化
- 有限时间等温过程：
  不可逆功的几何描述与调控优化
- 总结

传统热力学



传统热力学关注准静态过程

卡诺热机需要工作在准静态极限下，实现可逆循环

$$\tau \to \infty$$

输出功率

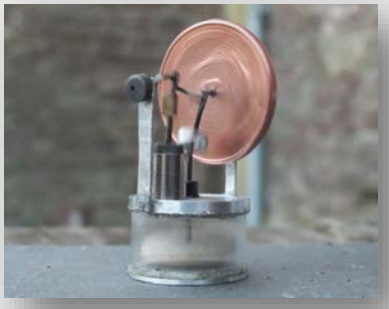
$$P = W/\tau \to 0$$

卡诺效率

$$\eta_C = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

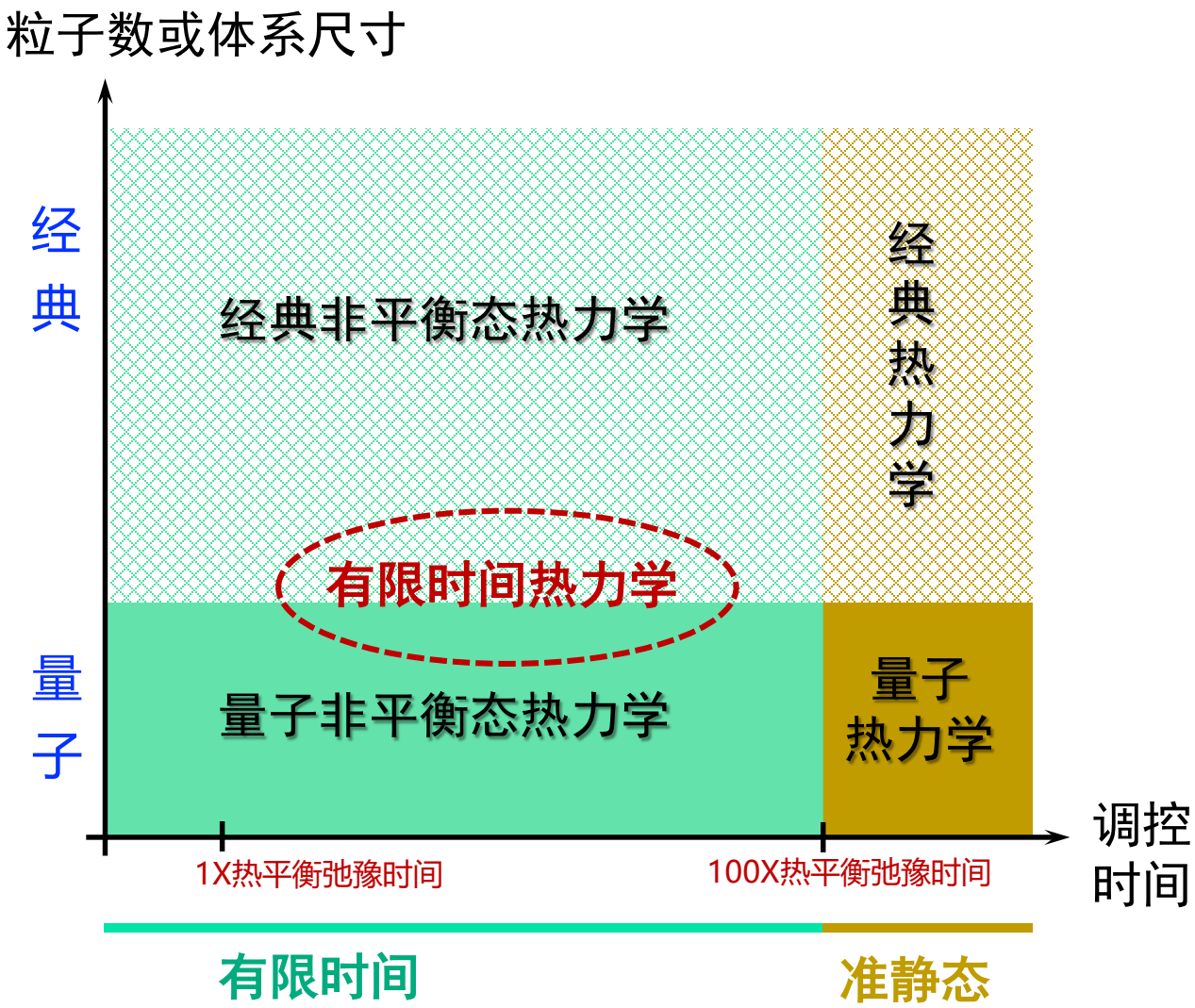
没有实际应用价值！

有限时间热力学

	理想热机	实际热机
循环时间	$\tau \to \infty$	$\tau < \infty$
功率	$P \to 0$	$P > 0$
效率	$\eta_{\max} = 1 - T_c/T_h$	$\eta_{\max} < 1 - T_c/T_h$
演示图		

- 减小有限时间过程不可逆性与能量耗散
- 优化有限时间热力学循环以提高热机的**功率**和效率

热力学的“相图”


粒子数或体系尺寸
经典
量子
经典非平衡态热力学
经典热力学
有限时间热力学
量子非平衡态热力学
量子热力学
1X热平衡弛豫时间
100X热平衡弛豫时间
调控时间
有限时间
准静态

有限时间热力学的发展



Curzon-Ahlborn效率 $\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_h}}$

J. Yvon, in First Geneva Conf. Proc. UN (1955)
F. L. Curzon and B. Ahlborn, *Am. J. Phys.* 43, 22 (1975)

低耗散卡诺热机功率的优化

不可逆性唯象描述

$$Q = T\left(\Delta S - S^{(\mathrm{irr})}\right)$$

$$S^{(\mathrm{irr})} \propto 1/\tau$$

优化 ➡ 有限时间卡诺循环

高 温 传 热	低 温 传 热	功 率	效 率
$Q_h = T_h\left(\Delta S - \frac{\Sigma_h}{\tau_h}\right)$	$Q_c = T_c\left(-\Delta S - \frac{\Sigma_c}{\tau_c}\right)$	$P = \frac{Q_h + Q_c}{\tau_h + \tau_c}$	$\eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_h}$

提高有限时间循环的功率P：

调控时间的分配 τ_h, τ_c

减小不可逆性 Σ_h, Σ_c

➡

最大化功率 $P_{\max}$

最大功率效率 η_{EMP}

M. Esposito, R. Kawai, K. Lindenberg, and C. van den Broeck, *Phys. Rev. Lett.* 105, 150603 (2010)
Y. H. Ma, D. Xu, H. Dong, C. P. Sun, *Phys. Rev. E* 98, 042112 (2018)

有限时间热力学：量子动力学描述

量子小系统的
非平衡态动力学



有限时间热力学
优化量子热机

热力学过程	系统	动力学演化	有限时间效应
有限时间 绝热过程	受驱动 量子闭系统	$\dot{\rho}=-i[H(\lambda_t),\rho]$	额外做功$W^{(\mathrm{ex})}$
有限时间 等温过程	受驱动 量子开系统	$\dot{\rho}=\mathfrak{L}_{\lambda_t}(\rho)$	不可逆功$W^{(\mathrm{irr})}$ 不可逆熵产生$S^{(\mathrm{irr})}$
有限时间 等容过程	量子开系统	$\dot{\rho}=\mathfrak{L}_{\lambda_0}(\rho)$	不可逆熵产生$S^{(\mathrm{irr})}$

J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong, *Phys. Rev. E* 100, 032144 (2019)
J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong, *Phys. Rev. E* 100, 062140 (2019)
J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong. arXiv:2101.02948

量子热力学中的功与热

系统内能 $E = \mathrm{Tr}(\rho H)$

$$\dot{E} = \mathrm{Tr}(\dot{\rho} H) + \mathrm{Tr}(\rho \dot{H})$$
$$\| \qquad \|$$
$$\dot{Q} \qquad \dot{W}$$

内能的改变 = 吸热 + 做功

热力学第一定律

ρ 系统密度矩阵
表示系统状态

H 有效哈密顿量
受调控参数λ影响

量子闭系统幺正演化

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho]$$

热力学绝热

$$\dot{Q} = \mathrm{Tr}(-i[H, \rho]H) = 0$$
$$W(\tau) = E(\tau) - E(0)$$

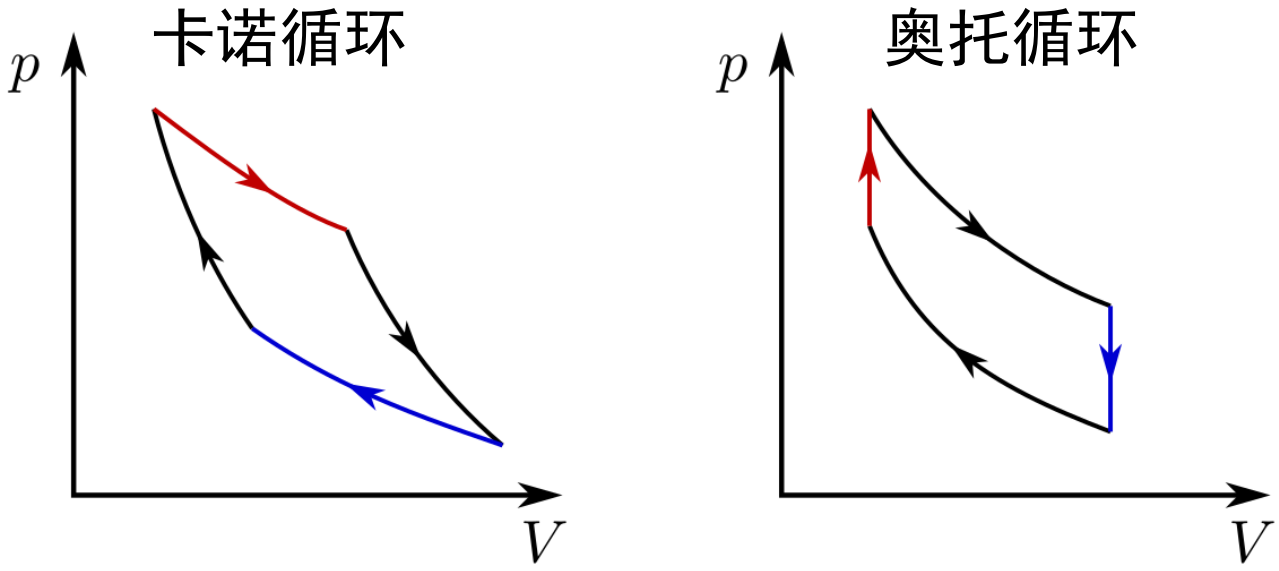
R. Alicki, *J. Phys. A: Math. Gen.* 12, L103--L107 (1979)
H. T. Quan, Y.-X. Liu, C. P. Sun and F. Nori, *Phys. Rev. E* **76**, 031105

报告大纲

- 背景：有限时间热力学
- 有限时间绝热过程：
  量子奥托热机的功率优化
- 有限时间等温过程：
  不可逆功的几何描述与调控优化
- 总结

能否超越卡诺？

- 对于有限时间循环，没有任何先验理论表明卡诺循环仍然是最优的



- 量子奥托循环需考虑绝热过程的优化

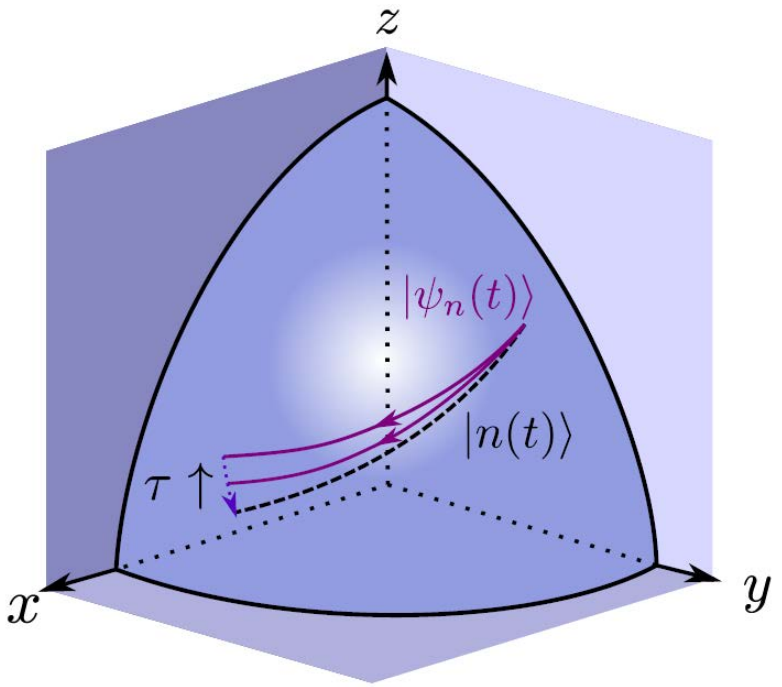
有限时间绝热过程

系统演化 $$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_n(t)\rangle = H(t)|\psi_n(t)\rangle$$

绝热调控 $$H(t) = H[R(t)] = \sum_n E_n(t)|n(t)\rangle\langle n(t)|$$

初态 $$|\psi_n(0)\rangle = |n(0)\rangle$$

$$\rho(0) = \sum_n p_n\,|n(0)\rangle\langle n(0)|$$



量子绝热过程 $\tau \to \infty$ $|\psi_n(t)\rangle \propto |n(t)\rangle$

有限时间绝热过程 $\tau < \infty$ $$|\psi_n(t)\rangle = \sum_l c_{nl}(t)e^{-i\phi_l(t)}|l(t)\rangle$$

$|c_{nl}(t)|^2$：$n \to l$的跃迁概率　　$\phi_l(t)$ 动力学相位

绝热过程的有限时间效应：额外做功

绝热过程做功 = 末态内能 - 初态内能

有限时间绝热过程做功

$$W(\tau) = \mathrm{Tr}[\rho(\tau)H(\tau)] - \mathrm{Tr}[\rho(0)H(0)]$$
$$= \sum_n p_n \left[\sum_l |c_{nl}(\tau)|^2 E_l(\tau) - E_n(0)\right]$$

量子绝热过程做功

$$W_{\mathrm{adi}} = \sum_n p_n \left[E_n(\tau) - E_n(0)\right]$$

额外做功

$$W^{(\mathrm{ex})}(\tau) = W(\tau) - W_{\mathrm{adi}}$$

初态为热平衡态 $p_n = \frac{e^{-\beta E_n(0)}}{\sum_n e^{-\beta E_n(0)}}$　　可证得 $W^{(\mathrm{ex})}(\tau) \geq 0$

长时间绝热过程：一阶绝热近似

高阶绝热近似理论给出$c_{nl}(t)$逐阶展开，一阶结果为

$$c_{nl}^{[1]}(\tau)=\begin{cases}e^{i\tilde{\gamma}_n(1)}, & n=l\\ -\frac{i}{\tau}\left[\tilde{T}_{nl}(1)e^{-i\tau[\tilde{\phi}_n(1)-\tilde{\phi}_l(1)]+i\tilde{\gamma}_n(1)}-\tilde{T}_{nl}(0)e^{i\tilde{\gamma}_l(1)}\right], & n\neq l\end{cases}$$

动力学相位 $\tilde{\phi}_l(s)=\int_0^s\tilde{E}_l(s')ds'$

有效跃迁率 $\tilde{T}_{nl}(s)=\frac{\langle\tilde{l}(s)|\frac{d}{ds}|\tilde{n}(s)\rangle}{\tilde{E}_n(s)-\tilde{E}_l(s)}$

Berry相位 $\tilde{\gamma}_l(s)=i\int_0^s\langle\tilde{l}(s')|\frac{d}{ds'}|\tilde{l}(s')\rangle ds'$

非对角项满足 $c_{nl}^{[1]}(\tau)\propto 1/\tau$

C.-P. Sun, J. Phys. A: Math. Gen. 21, 1595 (1988).

额外做功的一阶绝热近似结果

$$W^{(\mathrm{ex})}(\tau) = W^{(\mathrm{mean})}(\tau) + W^{(\mathrm{osc})}(\tau)$$

平均部分

$$W^{(\mathrm{mean})}(\tau) = \frac{\Sigma}{\tau^2}$$

振荡部分

$$W^{(\mathrm{osc})}(\tau) = \frac{\omega(\tau)}{\tau^2}$$

能级差不可共度的系统、初态高温　　$\omega(\tau)$可忽略　　$W^{(\mathrm{ex})}(\tau)$按τ^{-2}减小

简单系统(二能级、谐振子)　　$\omega(\tau)$不可忽略　　$W^{(\mathrm{ex})}(\tau)$振荡减小

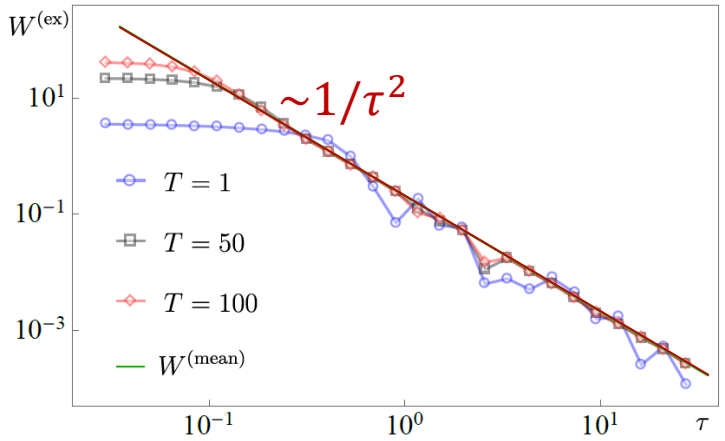
$$\Sigma = \sum_{n,l\neq n} p_n[\tilde{E}_l(1) - \tilde{E}_n(1)]\left[\left|\tilde{T}_{nl}(1)\right|^2 + \left|\tilde{T}_{nl}(0)\right|^2\right]$$

$$\omega(\tau) = -\sum_{n,l\neq n} 2p_n[\tilde{E}_l(1) - \tilde{E}_n(1)]\mathrm{Re}\{\tilde{T}_{nl}(1)\tilde{T}^*_{nl}(0)e^{-i\tau\left(\tilde{\phi}_n(1)-\tilde{\phi}_l(1)\right)+i\left(\tilde{\gamma}_n(1)-\tilde{\gamma}_l(1)\right)}\}$$

J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong, *Phys. Rev. E* 100, 062140 (2019)

额外做功的$1/\tau^2$标度关系

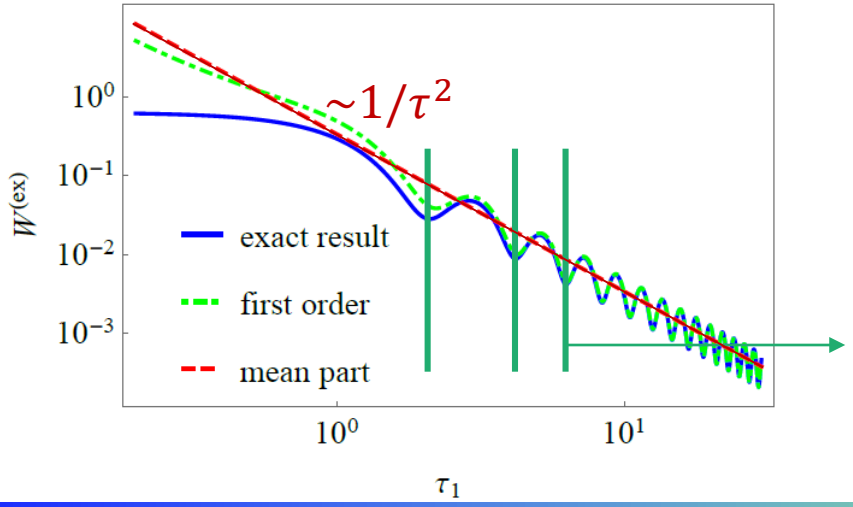
边界改变的无限深势阱



能级$E_n \propto n^2$

温度升高，振荡减小

频率改变的谐振子势



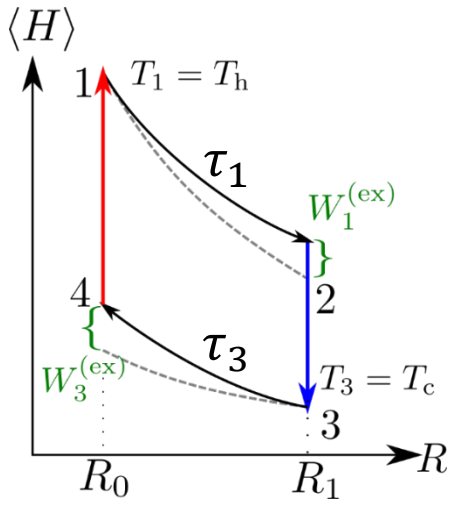
能级$E_n \propto n$

额外做功的振荡是周期的

特定调控时长下，额外做功更小

J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong, *Phys. Rev. E* 100, 062140 (2019)
J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong, *Phys. Rev. E* 100, 032144 (2019)

基于$1/\tau^2$标度关系优化奥托循环



额外做功　$W_1^{(ex)}, W_3^{(ex)}$

调控时长　τ_1, τ_3

调控参数　R

考虑等容过程快速热化，时间消耗可忽略

忽略额外做功的振荡部分

输出功　$$W_T = W_T^{adi} - \frac{\Sigma_1}{\tau_1^2} - \frac{\Sigma_3}{\tau_3^2}$$

吸热　$$Q_h = Q_h^{adi} - \frac{\Sigma_3}{\tau_3^2}$$

准静态奥托循环效率　$$\eta^{adi} = W_T^{adi}/Q_h^{adi} < \eta_C$$

adi表示准静态奥托循环下相应物理量

有限时间量子奥托热机的优化

	η_{EMP}	η_{EMP}^{-}	η_{EMP}^{+}
卡诺循环	$\dfrac{\eta_C}{2-\eta_C\left[1+\left(\frac{T_C\Sigma_C}{T_h\Sigma_h}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}}$	$\dfrac{\eta_C}{2}$	$\dfrac{\eta_C}{2-\eta_C}$
奥托循环	$\dfrac{2\eta^{\mathrm{adi}}}{3-\eta^{\mathrm{adi}}\left[1+\left(\frac{\Sigma_1}{\Sigma_3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-1}}$	$\dfrac{2\eta^{\mathrm{adi}}}{3}$	$\dfrac{2\eta^{\mathrm{adi}}}{3-\eta^{\mathrm{adi}}}$

理想气体循环

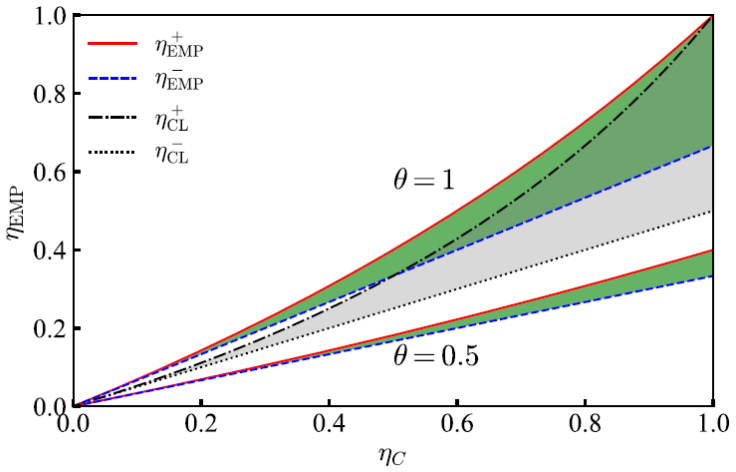
$$\eta^{\mathrm{adi}}=1-\frac{V_0}{V_1}$$

$$\eta_C=1-\frac{T_c}{T_h}$$

$$\eta^{\mathrm{adi}}\leq\eta_C$$

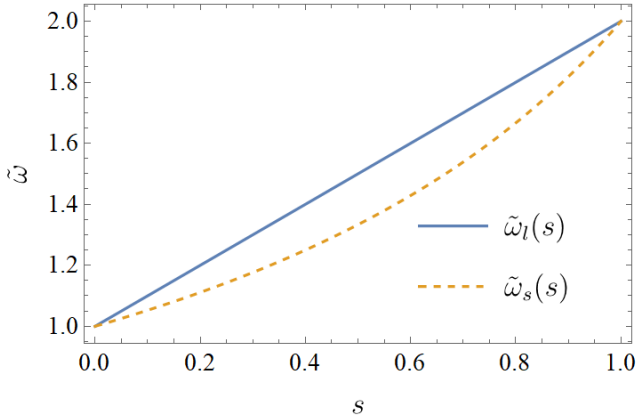
当$\eta^{\mathrm{adi}}>3\eta_C/(4-\eta_C)$时，　奥托循环EMP超过卡诺循环EMP

有限时间量子热机的优化
不应该只限于卡诺循环



J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong, *Phys. Rev. E* 100, 062140 (2019)

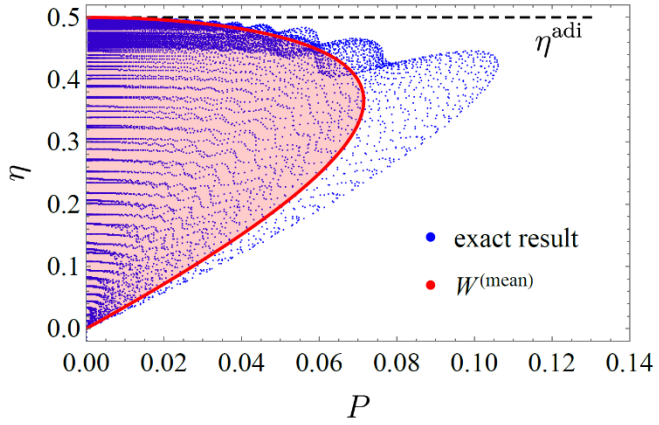
谐振子奥托循环：振荡部分影响



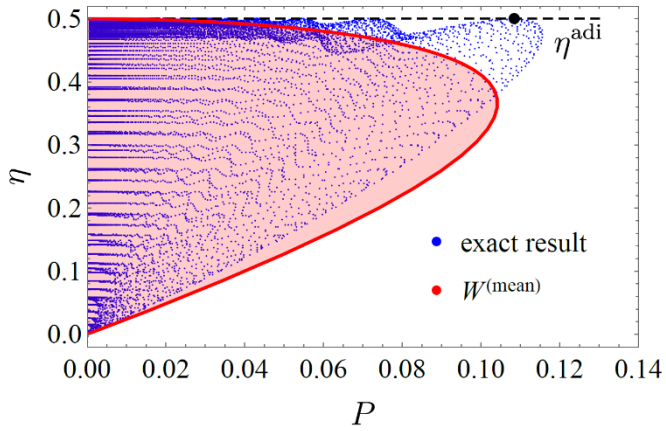
$$\tilde{\omega}_l(s) = \omega_0 + (\omega_\tau - \omega_0)s$$

$$\tilde{\omega}_s(s) = \frac{\omega_0\omega_\tau}{(\omega_0 - \omega_\tau)s + \omega_\tau}$$

线性调控$\tilde{\omega}_l(s)$



特殊调控$\tilde{\omega}_s(s)$



蓝色散点
给定τ_1, τ_3严格结果

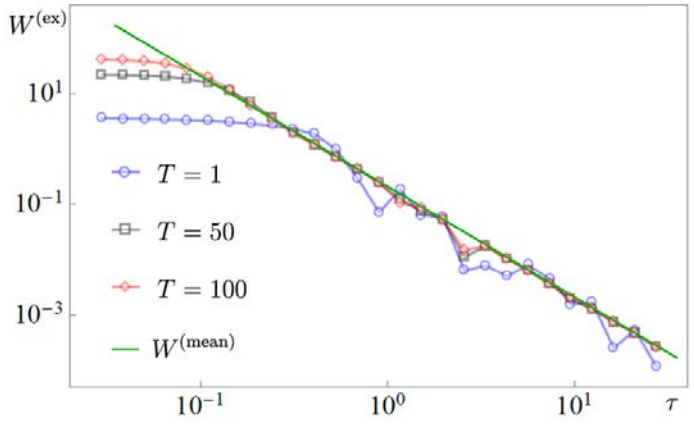
红色区域
忽略振荡项的结果

额外做功的振荡不可忽略时，可选取合适调控时间减小额外做功，提高P与η

J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong, *Phys. Rev. E* 100, 032144 (2019)

小结

- $W^{(\mathrm{ex})} \propto \tau^{-2}$



- 奥托循环的最大功率效率可能更大

$$\eta_{\mathrm{EMP}} = \frac{2\eta^{\mathrm{adi}}}{3 - \dfrac{\eta^{\mathrm{adi}}}{1 + (\Sigma_1/\Sigma_3)^{1/3}}}$$

- 额外做功的振荡性可进一步提高P与η

J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong, *Phys. Rev. E* 100, 062140 (2019)
J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong, *Phys. Rev. E* 100, 032144 (2019)

报告大纲

- 背景：有限时间热力学
- 有限时间绝热过程：
  量子奥托热机的功率优化
- 有限时间等温过程：
  不可逆功的几何描述与调控优化
- 总结

不可逆性的τ^{-1}标度关系

有限时间等温过程传热与熵产生的关系

$$Q = T\left(\Delta S - S^{(\mathrm{irr})}\right)$$

不可逆熵产生的时间反比关系

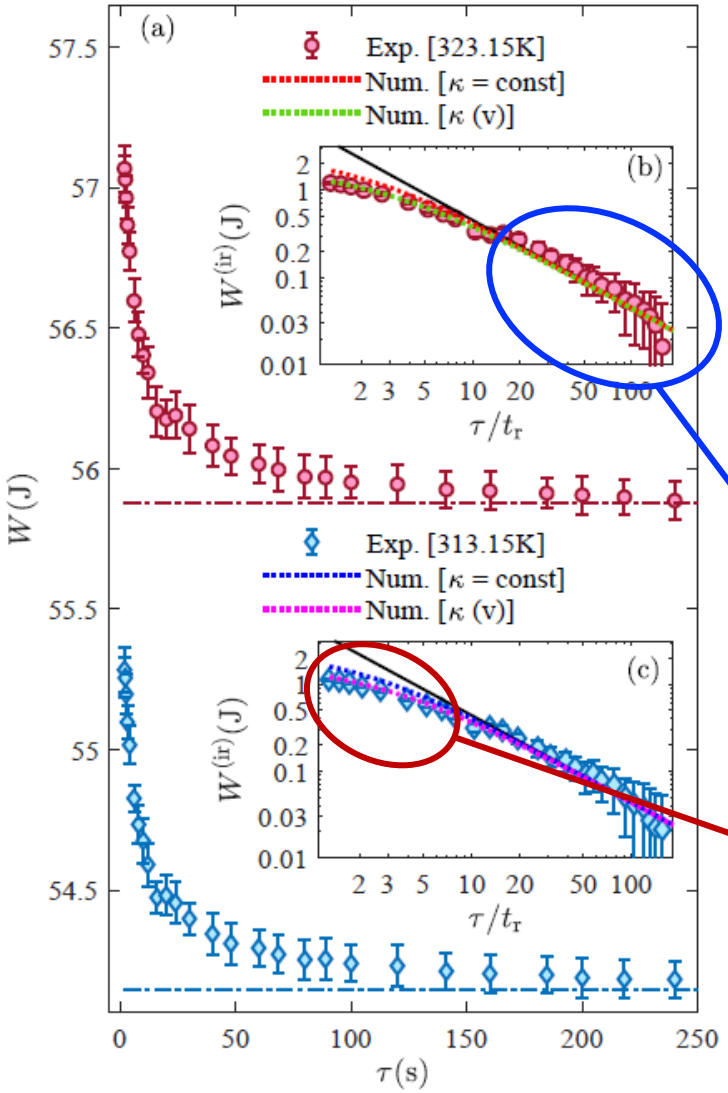
在各种模型中都有发现或预言

$$S^{(\mathrm{irr})} \propto \tau^{-1}$$

实际热机模型

F. L. Curzon and B. Ahlborn, *Am. J. Phys.* 43, 22 (1975)
C. Van den Broeck, *Phys. Rev. Lett.* 95, 190602 (2005)
T. Schmiedl and U. Seifert, *EPL* 81 20003 (2007)
M. Esposito, R. Kawai, K. Lindenberg, and C. van den Broeck, *Phys. Rev. Lett.* 105, 150603 (2010)

$1/\tau$标度关系的实验验证



$$\boldsymbol{W^{(\mathrm{irr})} \propto 1/\tau} \qquad \boldsymbol{\tau \gg t_{\mathrm{r}}}$$

$$W^{(\mathrm{irr})} = T_b \Delta S^{(\mathrm{irr})} \approx \frac{p_0 p_f^{\mathrm{iso}} \left(V_f - V_0\right)^2}{\kappa T_b \tau}$$

长时区域， $1/\tau$标度关系满足

短时区域，不可逆功偏离 $1/\tau$标度关系

Y. H. Ma, R. X. Zhai, J. Chen, C. P. Sun and H. Dong, *Phys. Rev. Lett.* 125, 210601 (2020)

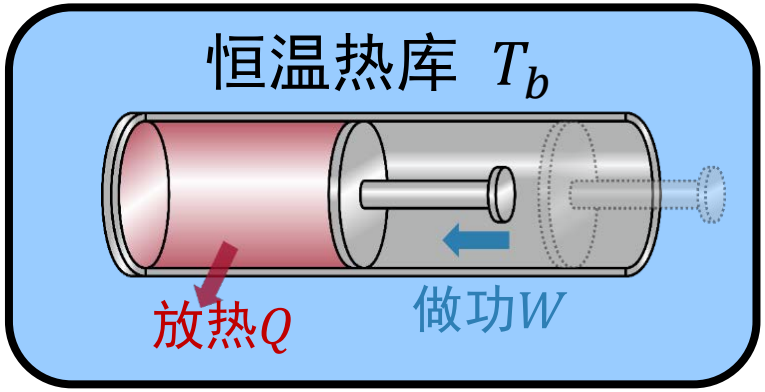
等温过程调控方式的优化

不可逆性的τ^{-1}标度关系 ➡ 低耗散卡诺热机的优化

$$P=\frac{1}{\tau_h+\tau_c}\left[(T_h-T_c)\Delta S-\frac{T_h\Sigma_h}{\tau_h}-\frac{T_c\Sigma_c}{\tau_c}\right]$$

除了合理分配调控时间τ_h,τ_c

还应优化调控方式，减小Σ_h,Σ_c，增大功率P



理想气体有限时间压缩过程

热力学第一定律

$$\frac{dU}{dt}=\frac{dW}{dt}+\frac{dQ}{dt}$$

气体温度变化

$$C_V\frac{dT}{dt}=-p\frac{dV}{dt}-\gamma C_V(T-T_{\mathrm{b}})$$

气体内部弛豫极快
⇒气体温度T

线性传热定律

$C_V=\frac{3}{2}nRT$ 单原子气体等容热容

$p=\frac{nRT}{V}$ 气体压强

T_{b} 热库温度

γ 冷却速率

缓慢调控 $\frac{nR\dot{V}}{C_V V}\ll\gamma$

$$T\approx T_b-\frac{nRT_b}{\gamma C_V}\frac{\dot{V}}{V}$$

压缩过程调控方式优化

有限时间等温压缩做功

$$W = -\int_0^\tau p\dot{V}dt$$

$$= -\int_0^\tau \frac{nRT_b}{V}\dot{V}dt + \int_0^\tau \frac{(nR)^2T_b}{\gamma C_V}\frac{\dot{V}^2}{V^2}dt$$

$$S^{(\mathrm{irr})} \sim \frac{W^{(\mathrm{irr})}}{T_b}$$

准静态做功

$$W_{(0)} = nRT_\mathrm{b}\ln\frac{V_0}{V_\tau}$$

不可逆功

$$W^{(\mathrm{irr})} > 0$$

依赖 { 调控方式 / 调控时长

定义热力学长度(为曲线积分)

$$\mathcal{L} \equiv \int_0^\tau \sqrt{\frac{(nR)^2T_b}{\gamma C_V}}\left|\frac{\dot{V}}{V}\right|dt$$

$$= \sqrt{\frac{(nR)^2T_b}{\gamma C_V}}\left|\ln\frac{V_0}{V_\tau}\right|$$

只由初末气体体积比决定

压缩过程调控方式优化

由柯西不等式得到

$$W^{(\mathrm{irr})} \geq \frac{\mathcal{L}^2}{\tau}$$

$1/\tau$ 标度关系
+
不可逆功下界

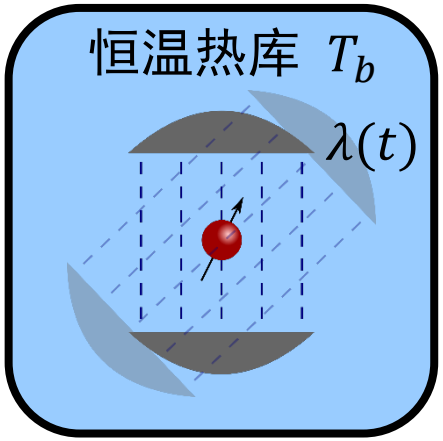
最优调控满足

$$\frac{\dot{V}}{V} = \mathrm{const}$$

为指数调控

$$\tilde{V}_{\mathrm{op}}(s) = V_0 \left(\frac{V_\tau}{V_0}\right)^s \qquad s = t/\tau$$

受驱动的量子开系统



有效哈密顿量

$$H(t) = H[\lambda(t)]$$

主方程

$$\dot{\rho} = \mathfrak{L}_{\lambda(t)}[\rho]$$

瞬时热平衡态$\rho_{eq}(t)$为$\mathfrak{L}_{\lambda(t)}$唯一的零本征态

$$\mathfrak{L}_{\lambda(t)}\left[\rho_{eq}(t)\right] = 0$$

$$\rho_{eq}(t) = \frac{e^{-\beta H(t)}}{\mathrm{Tr}[e^{-\beta H(t)}]}$$

改写主方程

$$\dot{\rho} = \mathfrak{L}_{\lambda(t)}[\rho - \rho_{eq}(t)]$$

V. Cavina, A. Mari, and V. Giovannetti, *Phys. Rev. Lett.* 119, 050601 (2017).
M. Scandi and M. Perarnau-Llobet, *Quantum* 3, 197 (2019).

受驱动的量子开系统

形式级数解

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Omega_{\lambda(t)}^{-1} \frac{d}{dt} \right)^n \rho_{eq}(t)$$

做功功率可分为

$$\dot{W} = \mathrm{Tr}\left(\rho \dot{H}\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\rho_{eq}(t)\dot{H}\right] + \mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\Omega_{\lambda(t)}^{-1} \frac{d}{dt} \right)^n \rho_{eq}(t)\right)\dot{H}\right]$$

可逆做功功率 $\dot{W}_{(0)}$

不可逆功功率 $\dot{W}^{(\mathrm{irr})}$

J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong. arXiv:2101.02948

量子开系统的最优调控

不可逆功保留至最低阶

$$W^{(\mathrm{irr})}=\int_0^{\tau}\mathrm{Tr}\left[\mathfrak{Q}_{\lambda(t)}^{-1}\left(\dot{\rho}_{eq}(t)\right)\dot{H}\right]dt$$

多调控参数时

热力学量：不可逆功

$$W^{(\mathrm{irr})}=\int_0^1\frac{d\vec{\lambda}}{ds}\cdot\boldsymbol{g}\cdot\frac{d\vec{\lambda}}{ds}ds$$

几何量：热力学长度

$$\mathcal{L}=\int_0^1\sqrt{\frac{d\vec{\lambda}}{ds}\cdot\boldsymbol{g}\cdot\frac{d\vec{\lambda}}{ds}}ds$$

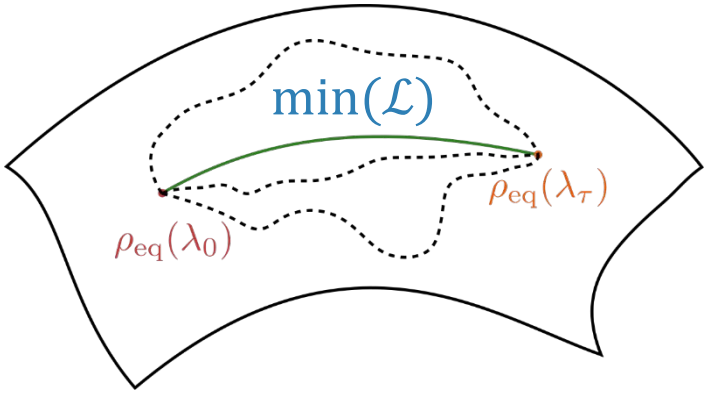
$$g_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\mathfrak{Q}_{\vec{\lambda}}^{-1}\left(\frac{\partial\rho_{eq}}{\partial\lambda^{\mu}}\right)\frac{\partial H}{\partial\lambda^{\nu}}+\mathfrak{Q}_{\vec{\lambda}}^{-1}\left(\frac{\partial\rho_{eq}}{\partial\lambda^{\nu}}\right)\frac{\partial H}{\partial\lambda^{\mu}}\right]\qquad\begin{matrix}\vec{\lambda}(0)=\vec{\lambda}_0\\ \vec{\lambda}(1)=\vec{\lambda}_{\tau}\end{matrix}$$

减小不可逆功 ➡ 最小化$\mathcal{L}$：寻找测地线

D. A. Sivak and G. E. Crooks, *Phys. Rev. Lett.* 108, 190602 (2012).
M. Scandi and M. Perarnau-Llobet, *Quantum* 3, 197 (2019).

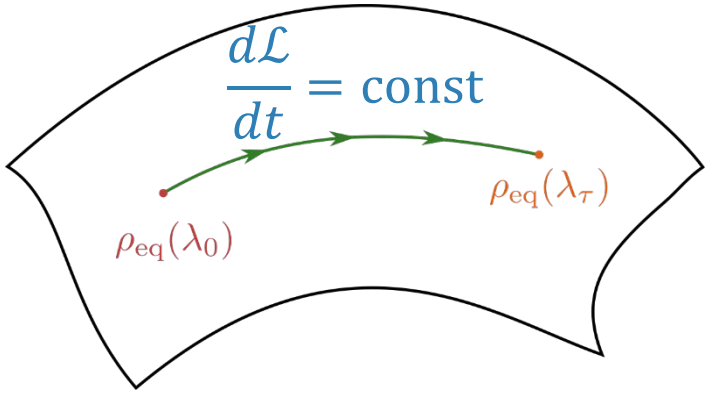
量子开系统的最优调控

热力学长度赋予了参数空间度规，
最优调控确定如下



1. 找到连接初末的最短路径

2. 按照$\dot{W}^{(\mathrm{irr})} = \mathrm{const}$(或$\dot{\mathcal{L}} = \mathrm{const}$)
确定测地线上的最优调控



长时间极限下，不可逆功下界为

$$W^{(\mathrm{irr})} \geq \frac{\mathcal{L}^2}{\tau}$$

例子：量子布朗运动

量子布朗运动主方程

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H(t),\rho] - i\kappa[x,\{p,\rho\}] - \frac{2m\kappa}{\beta_b}\big[x,[x,\rho]\big]$$

哈密顿量 $H(t) = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega(t)^2x^2$

拉格朗日量 $L(t) = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{1}{2}m\omega(t)^2x^2$

坐标动量关联 $D(t) = \omega(t)\dfrac{(xp+px)}{2}$

有限时间过程做功 $\dot{W} = \dfrac{\dot{\omega}}{\omega}(\langle H\rangle - \langle L\rangle)$

准静态过程做功 $\dot{W}_{(0)} = k_B T_b \dfrac{\dot{\omega}}{\omega}$

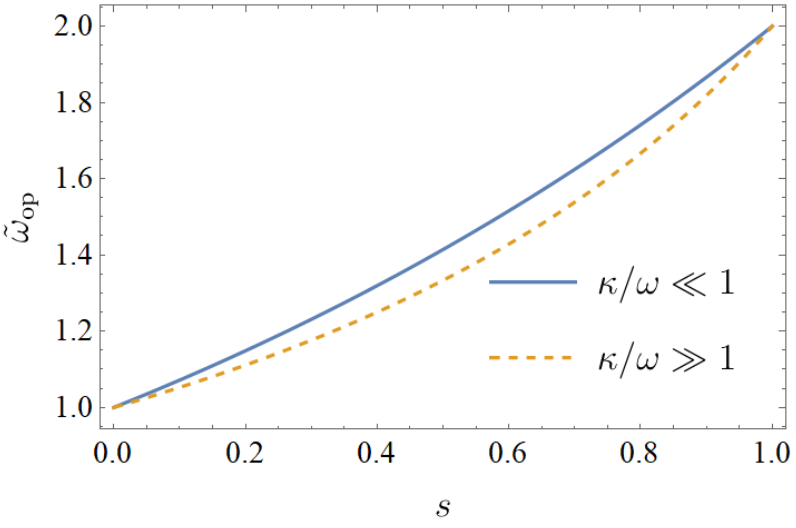
H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, 2007).

例子：量子布朗运动

热力学长度 $$\mathcal{L}=\sqrt{\frac{k_B T_b}{2\kappa}}\left|\left[\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\omega}{2\kappa}\right)-\left(1+\frac{4\kappa^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\right]\right|_{\omega=\omega_0}^{\omega_\tau}$$

最优调控 $$\left(\frac{1}{2\kappa}+\frac{2\kappa}{\tilde{\omega}_{\mathrm{op}}^2}\right)^{1/2}\frac{1}{\tilde{\omega}_{\mathrm{op}}}\frac{d\tilde{\omega}_{\mathrm{op}}}{ds}=\text{const}$$ $$s=t/\tau$$

	热力学长度$\mathcal{L}$	最优调控$\tilde{\omega}_{\mathrm{op}}(s)$
欠阻尼极限 $\kappa/\omega \ll 1$	$\sqrt{\frac{k_B T_b}{2\kappa}}\left\|\ln\frac{\omega_\tau}{\omega_0}\right\|$	$\omega_0\left(\frac{\omega_\tau}{\omega_0}\right)^s$
过阻尼极限 $\kappa/\omega \gg 1$	$\sqrt{2\kappa k_B T_b}\left\|\frac{\omega_\tau-\omega_0}{\omega_0\omega_\tau}\right\|$	$\frac{\omega_0\omega_\tau}{(\omega_0-\omega_\tau)s+\omega_\tau}$



J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong. arXiv:2101.02948

热力学长度的测量

$\mathcal{L}$决定不可逆功的下界，
但难以实验直接测量

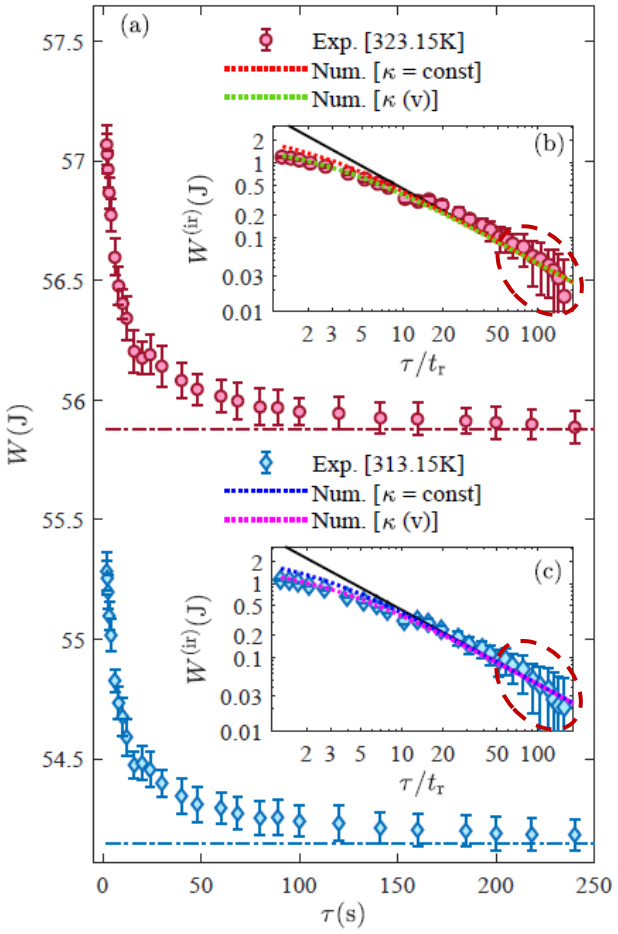
定义有限时间的热力学长度

$$\mathcal{L}(\tau) \equiv \int_0^\tau \sqrt{\dot{W}^{(\mathrm{irr})}(t)}\, dt$$

1. 长时间极限存在，不再依赖于τ

$$\mathcal{L} = \lim_{\tau\to\infty} \mathcal{L}(\tau)$$

2. 对单参数调控情形，极限不依赖于调控方式



J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong. arXiv:2101.02948

热力学长度的测量

$\mathcal{L}$决定不可逆功的下界，
但难以实验直接测量

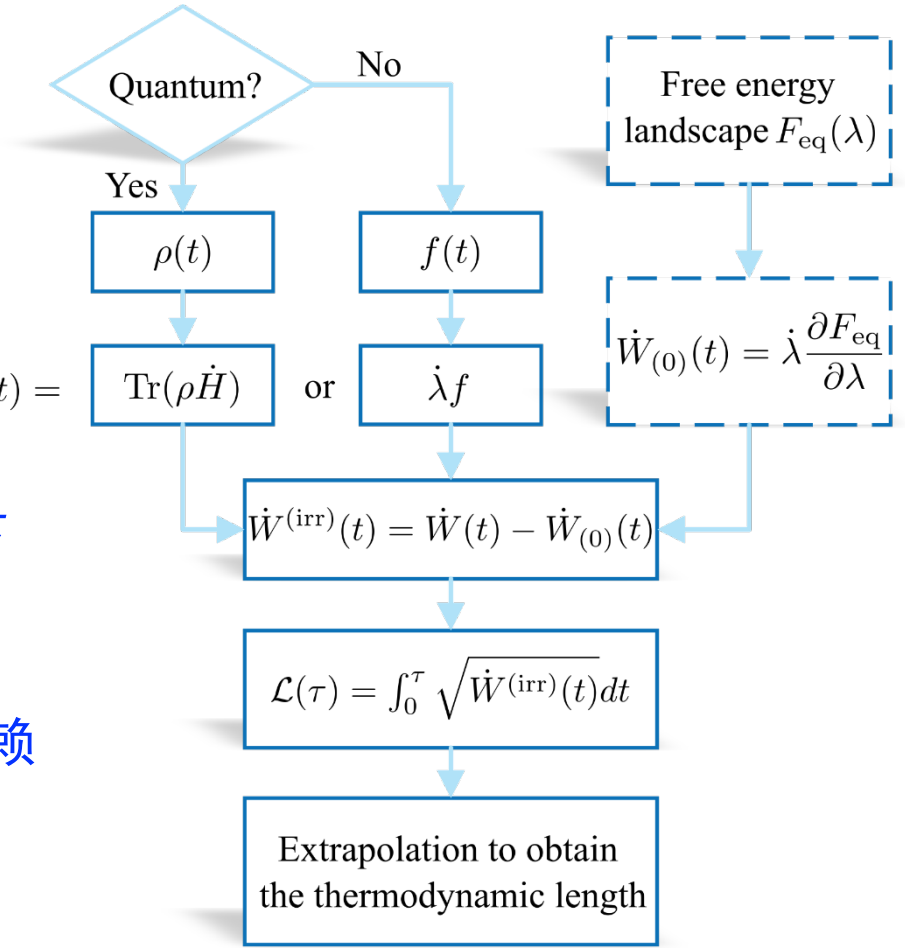
定义有限时间的热力学长度

$$\mathcal{L}(\tau) \equiv \int_0^\tau \sqrt{\dot{W}^{(\mathrm{irr})}(t)}\, dt$$

1. 长时间极限存在，不再依赖于τ

$$\mathcal{L} = \lim_{\tau\to\infty} \mathcal{L}(\tau)$$

2. 对单参数调控情形，极限不依赖于调控方式



J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong. arXiv:2101.02948

热力学长度的测量

选取截断N外推如下

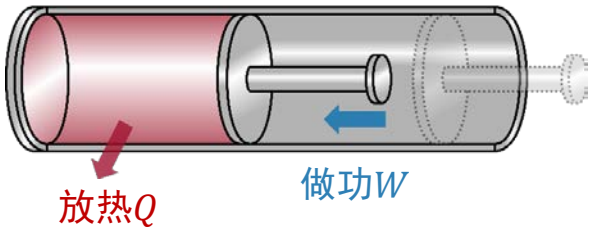
$$\mathcal{L}(\tau) = \mathcal{L} + \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\tau^j}$$

1. 不依赖于截断N
2. 不同操控方式插值外推得到的$\mathcal{L}$应相同

对理想气体压缩和变频谐振子，数值模拟结果表明此方法有效

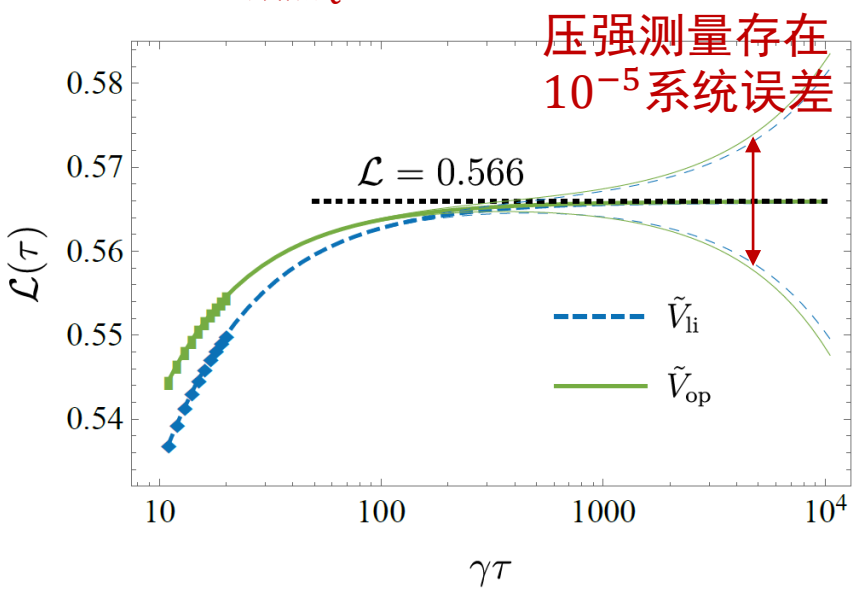
例子：理想气体压缩

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{nRT}{C_V V}\frac{dV}{dt} - \gamma C_V (T - T_{\mathrm{b}})$$



$$\mathcal{L}(\tau) = \int_0^{\tau} \left[-nR(T - T_b)\frac{\dot{V}}{V} \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$V_0 = 1$$
$$V_\tau = 0.5$$
$$nR = T_b = \gamma = 1$$
$$C_V = \frac{3}{2}nR = 1.5$$

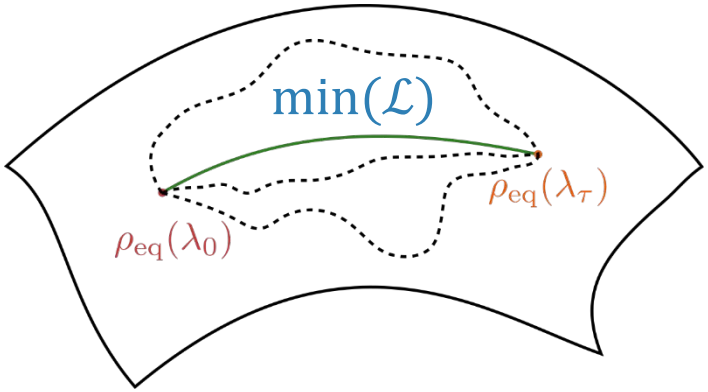


$$\mathcal{L}_{\mathrm{li}}(\tau) = 0.566 - \frac{0.318}{\tau} + \frac{0.010}{\tau^2} - \frac{0.146}{\tau^3}$$
$$\mathcal{L}_{\mathrm{op}}(\tau) = 0.566 - \frac{0.216}{\tau} + \frac{0.199}{\tau^2} - \frac{0.111}{\tau^3}$$

小结

- 热力学长度$\mathcal{L}$ ➡ 不可逆功下界 $W^{(\mathrm{irr})} \geq \mathcal{L}^2/\tau$
  最优调控 $\tilde{\lambda}_{\mathrm{op}}(s)$

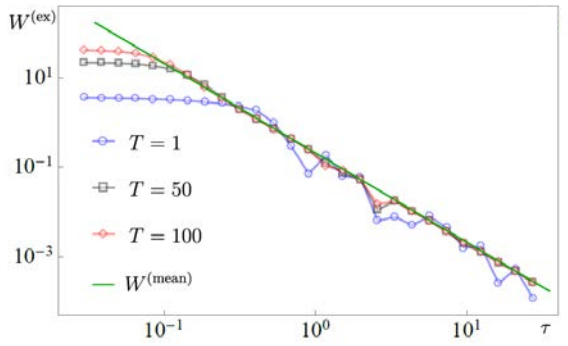
- 外推方法测量热力学长度



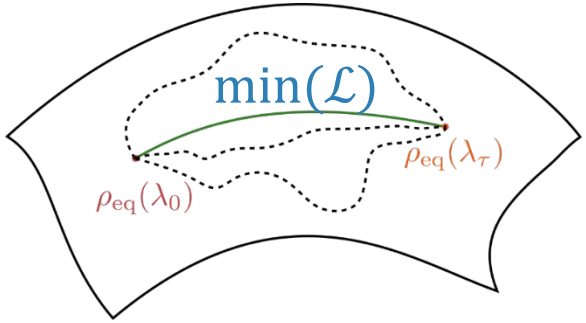
J. F. Chen, C. P. Sun, H. Dong, arXiv:2101.02948 (2021)

总结

- 有限时间绝热过程：
  - $W^{(\mathrm{ex})} \propto \tau_{\mathrm{adi}}^{-2}$
  - 有限时间奥托循环的优越性



- 有限时间等温过程：
  - $W^{(\mathrm{irr})} \geq \mathcal{L}^2/\tau_{\mathrm{iso}}$
  - 外推方法测量$\mathcal{L}$

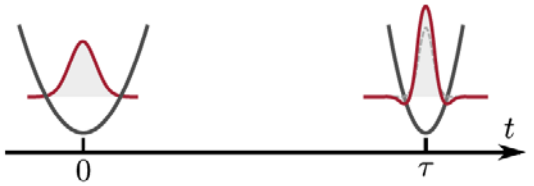




Thank You

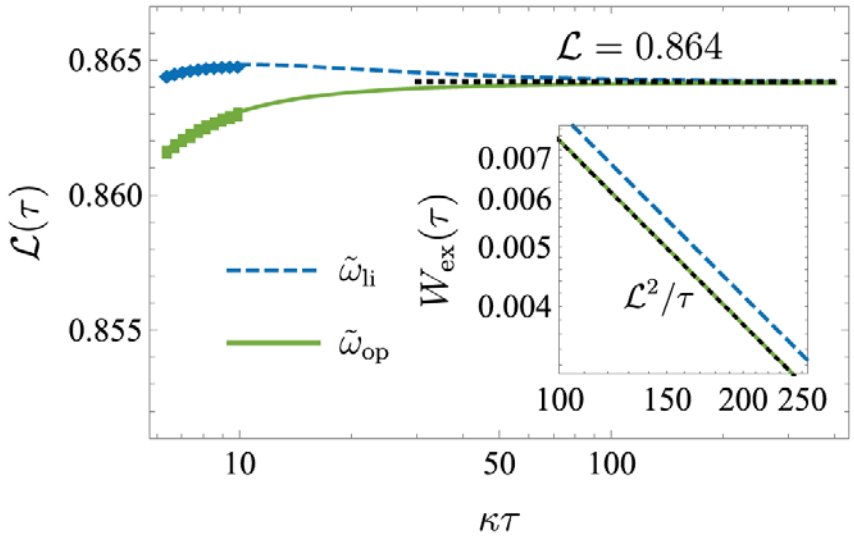
例子：变频谐振子

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H(t),\rho] - i\kappa[x,\{p,\rho\}] - \frac{2m\kappa}{\beta_b}[x,[x,\rho]]$$



$$\mathcal{L}(\tau) = \int_0^\tau \left[\frac{\dot{\omega}}{\omega}(\langle H\rangle - \langle L\rangle - k_B T_b)\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\omega_0 = 1$$
$$\omega_\tau = 2$$
$$\kappa = 1$$
$$k_B T_b = 1$$



$$\mathcal{L}_{\rm li}(\tau) = 0.864 + \frac{0.0128}{\tau} - \frac{0.0464}{\tau^2} - \frac{0.145}{\tau^3}$$

$$\mathcal{L}_{\rm op}(\tau) = 0.864 - \frac{0.00471}{\tau} - \frac{0.0448}{\tau^2} - \frac{0.168}{\tau^3}$$